# Eine Zweikanal-Rechnung für die elastische Streuung von $He^3$ an $He^3$

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
WERNER SÜNKEL
aus Oberlind

1968

9713

# Eine Zweikanal-Rechnung für die elastische Streuung von $He^3$ an $He^3$

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Werner Sünkel

aus Oberlind

1 9 6 8

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juni 1968

Dekan: Professor Dr. H. Blume
1.Berichterstatter: Professor Dr. K. Wildermuth
2.Berichterstatter: Professor Dr. E. Schmid

Inhaltsübersicht


| | Seite |
|---|---|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Lösung des Zweikanal-Streuproblems | |
| 2.1. Der Hamiltonoperator des 6-Nukleonen-systems | 3 |
| 2.2. Der Ansatz für die Wellenfunktion und das Raleigh-Schrödingersche Variations-prinzip | 5 |
| 2.3. Die Konsequenzen der Antisymmetrisierung | 10 |
| 2.4. Die Clusterstruktur des Reaktionskanals | 13 |
| 2.5. Die Konstruktion der gekoppelten Integro-Differentialgleichungen | 15 |
| 2.6. Die Lösung der Radialgleichungen | 20 |
| 2.7. Die Berechnung der komplexen Streuphasen $\delta_\ell$ | 26 |
| 3. Ergebnisse der Rechnung | 29 |
| 4. Anhang | |
| FORTRAN Subroutinen: INKA, INFRA, DIRA, DIAGO, TRANS, INVER, GESI | 40 |

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547601_0078

## 1. Einleitung

Die Clusterdarstellungen von Atomkernen und Kernreaktionen [1),2),3)] führen nicht nur zu einem qualitativen Verständnis der verschiedensten im Bereich der Kernphysik beobachtbaren Phänomene auf einheitlicher Grundlage, sondern auch zu quantitativen Aussagen. Diese Methode gestattet es, die Kenntnis von den Korrelationen der Nukleonen in Mehrteilchensystemen unmittelbar für die Konstruktion von Zustandswellenfunktionen zu verwenden. Erst auf diese Weise wird es möglich, die Mehrteilchen-Schrödingergleichung auf eine praktisch lösbare Form zu reduzieren, ohne dabei die strenge Gültigkeit des Pauliprinzips für die Näherungslösung zu verletzen.

Bei der Behandlung der elastischen Streuung von leichten Atomkernen aneinander ist es möglich, die allgemeine Lösung des Streuproblems, die sich nach einem vollständigen System von Clusterwellenfunktionen entwickeln läßt[3)], durch einen Zweiclusteransatz anzunähern.

Die in dieser Einkanalnäherung allein berücksichtigten Teilchenkorrelationen sind durch die beiden an der Streuung beteiligten Atomkerne gegeben. Eine solche Näherung ist solange gerechtfertigt, als im Bereich der betrachteten Energien andere Clusterstrukturen aus energetischen Gründen oder wegen der geringen Überlappung mit der Einkanalwellenfunktion im Reaktionsraum nicht an der Streuung beteiligt sein können. Rechnungen[4)5)], die im Rahmen dieser Einkanalnäherung bisher

durchgeführt wurden, ergaben im allgemeinen gute Übereinstimmung mit den experimentell gewonnenen Resultaten bis auf eine Ausnahme[6].

Die grobe Abweichung der Ergebnisse von Hamilton und Brandsden [6] für die elastische $He^3$-$He^3$ Streuung von den auf experimentellem Wege gefundenen Werten gab den Anstoß zur vorliegenden Arbeit.

Der Reaktionsquerschnitt für die Reaktion $He^3(He^3, \alpha)2p$ [7], der von ähnlicher Größenordnung wie der Querschnitt der elastischen $He^3$-$He^3$ Streuung ist, gibt zu der Vermutung Anlaß, daß die in der Arbeit von Hamilton und Brandsden auftretende Diskrepanz dadurch zustande kommt, daß in der Einkanalrechnung weitere Teilchenkorrelationen, die an der $He^3$-$He^3$ Streuung beteiligt sind, nicht berücksichtigt wurden.

In der vorliegenden Arbeit wird daher quantitativ untersucht werden, ob eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten erreicht werden kann, wenn in eine Clustermodellrechnung außer der $He^3$-$He^3$ Struktur noch eine $\alpha$-Diprotonstruktur einbezogen wird.

Man erhält im Rahmen dieser Zweikanalnäherung mit Hilfe des Raleigh-Schrödingerschen Variationsprinzips ein gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem, dessen Lösungen unter den entsprechenden Randbedingungen die $He^3$-$He^3$ Streuung mit dem angekoppelten $\alpha$-Diprotonkanal beschreiben.

## 2.1. Der Hamiltonoperator des 6-Nukleonensystems

Die Eigenschaften des vorliegenden 6-Nukleonensystems werden durch den zugehörigen Hamiltonoperator H vollständig beschrieben. Er bildet deshalb die Grundlage für die Behandlung des $He^3$-$He^3$ Streuproblems. Im Rahmen einer nichtrelativistischen Theorie setzt er sich aus zwei Anteilen zusammen, die der kinetischen Energie und dem Wechselwirkungspotential zwischen den Nukleonen entsprechen. $H = T + V$ . Wenn man eine Darstellung von H wählt, in der die Ortsvariablen diagonal sind, erhält man für

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_i^{\,2}}$$

( $m$ = Nukleonenmasse, $\vec{r}_i$ = Ortskoordinaten der Nukleonen) Da der Hamiltonoperator gegen eine gemeinsame Translation aller Ortskoordinaten der Teilchen invariant ist, ist die Schwerpunktsbewegung des Systems eine Erhaltungsgröße. Die konstante Bewegung des Massenmittelpunktes ist für die folgenden Betrachtungen ohne Bedeutung, so daß sie von Anfang an elliminiert werden darf. Das bedeutet, daß der Operator T durch

$$T' = T + \frac{\hbar^2}{12m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{\rho}^{\,2}} \qquad \left( \vec{\rho} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} \vec{r}_i \right)$$

zu ersetzen ist.

Die Wechselwirkung V kann in guter Näherung durch eine Summe von phänomenologischen zentralsymmetrischen Zweinukleonenkräften beschrieben werden. Mehrteilchenkräfte, sowie Spin-

Bahn und Tensorkräfte werden nicht berücksichtigt. Das Nukleon-Nukleon Potential

$$V_{ij} = -V_0 e^{-\kappa(\vec{r}_i-\vec{r}_j)^2}\left(W+MP_{ij}^{r}+BP_{ij}^{\sigma}-HP_{ij}^{\tau}\right)+\epsilon_{ij}\frac{e^2}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

ist von derselben Form, wie sie von Wildermuth, Schmid und Tang [4] bei der $\alpha$-$He^3$ Streuung verwendet wird. Die Parameter $V_0$ und k sind an die Nukleon-Nukleonstreudaten im Niederenergiebereich bis zu etwa 50 MeV im Schwerpunktsystem angepaßt. $V_0$ = 72.98 MeV, k = 0.46 $fm^{-2}$. Die exponentielle Form der radialen Abhängigkeit des Potentials bietet den Vorteil, daß die notwendigen Differentiationen und Integrationen analytisch durchgeführt werden können. Der Austauschcharakter des Potentials wird durch die üblichen Orts-, Spin- und Isospinaustauschoperatoren $P_{ij}^{r}$, $P_{ij}^{\sigma}$, $P_{ij}^{\tau}$ bestimmt. Der Anteil der jeweiligen Kraftkomponente am Potential ist durch die numerischen Konstanten W, M, B, H gegeben. Sie werden aus den folgenden Beziehungen berechnet.

a) W+M+B+H = 1 (Normierung)

b) W+M+B-H = X (X ist das Verhältnis der Zweiteilchenwechselwirkung im Singulett- zu der im Triplettzustand)

c) W = M

d) B = H

c')M = 2B

d')H = 2W

Die Gleichungen a) bis c) definieren das "Serberpotential", das Potential vom "Rosenfeld"-Typ ist durch a), b), c'), d') festgelegt. Aus diesen beiden Potentialtypen wird das

Nukleon-Nukleonpotential $V_{ij}$ zusammengesetzt.

$$V_{ij} = y\,V_s + (1-y)\,V_r$$

Der Parameter $y$ liegt in der Nähe von 1 damit man im Einklang mit den Zweinukleon Streudaten bleibt.

Inbezug auf das hier benutzte Potential sei noch erwähnt, daß es die Sättigungseigenschaft der Kernmaterie nicht wiedergibt. Diese kann jedoch beim Streuvorgang annähernd dadurch berücksichtigt werden, daß die Weiteparameter der internen Wellenfunktionen der am Streuvorgang beteiligten Reaktionspartner konstant gehalten werden.

## 2.2. Der Ansatz für die Wellenfunktion und das Raleigh-Schrödingersche Variationsprinzip

Der im Punkt 2.1 definierte Hamiltonoperator enthält im Prinzip alle Eigenschaften des vorliegenden 6-Nukleonensystems. Bei Streuproblemen interessiert man sich für die Wirkungsquerschnitte und die Winkelverteilung der aneinander gestreuten Atomkerne bei einer bestimmten Energie, da diese Größen mit den experimentellen Meßergebnisse verglichen werden können. Die gesuchte Information ist aufgrund der allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik [11] in den Energieeigenfunktionen des Hamiltonoperators enthalten. Die Eigenfunktionen sind vor allen anderen Zustandsfunktion dadurch ausgezeichnet, daß sie den Erwartungswert

gebildet mit H unter der Nebenbedingung der Normierungserhaltung zu einem Extremwert machen. Diese Kennzeichnung der Eigenfunktionen ist im Raleigh-Schrödingerschen variationsprinzip

$$\delta \int \psi^*(H-E)\psi \, d\tau = 0$$

mathematisch formuliert. Es ist äquivalent zur Schrödingergleichung, falls es als eine Bestimmungsgleichung zur exakten Berechnung von $\psi$ aufgefaßt wird, das heißt falls H in seinem vollständigen Hilbertraum diagonalisiert wird. Die Schrödingergleichung kann jedoch wegen der mathematischen Schwierigkeiten nicht exakt gelöst werden, so daß man veranlaßt wird, $\psi$ teilweise durch Näherungsansätze festzulegen. Die Anwendung des Variationsprinzips auf $\psi$ führt dann auf eine reduzierte Schrödingergleichung für den nicht angenäherten Teil von $\psi$, die praktisch lösbar ist.

Sinnvolle Näherungsansätze für die Wellenfunktion $\psi$ erhält man im Rahmen der Clusterdarstellungen von Atomkernen und Kernreaktionen. Wenn man $\psi$ nach einem vollständigen Satz von Clusterfunktionen entwickelt, ist es bei geeigneter Wahl der Basis oft möglich, daß bereits wenige Glieder der Entwicklung eine gute Näherung liefern. Zusätzlich wird die Anzahl der Clusterstrukturen durch die Wirkung des Pauliprinzips reduziert, da verschiedene Clusterwellenfunktionen nach Antisymmetrisierung übereinstimmen können. Die Auswahl der wesentlichen Clusterstrukturen kann auf Grund der Kenntnis der Nukleonenkorrelationen in Mehrteilchensystemen er-

folgen. Für den hier betrachteten Fall der elastischen Streuung von $He^3$ an $He^3$ ist die wichtigste Nukleonengruppierung durch den $He^3$ Kern gegeben. Die alleinige Berücksichtigung dieser Nukleonenkorrelation führt zu einer Einkanalnäherung für die elastische Streuung, wie sie von Hamilton und Brandsden [6] durchgerechnet wurde. Die diesbezüglichen Ergebnisse weichen stark von den experimentellen Resultaten ab. Im Gegensatz dazu erhielten Tang und Thompson [12] im Rahmen derselben Näherung für die elastische $He^3$-$He^3$ Streuung bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Im Bereich bis zu 6 MeV Streuenergie im Schwerpunktssystem ist der von ihnen berechnete differentielle Wirkungsquerschnitt gleich dem gemessenen, falls sie ein Nukleon-Nukleonpotential verwenden, das 20% "Rosenfeld"-Beimischung enthält.

Bei größeren Streuenergien ergibt sich eine Divergenz zwischen den Resultaten der Messung und denen der Rechnung. Anhand des Reaktionsquerschnittes der Reaktion $He^3(He^3,\alpha)2p$ [7),8),9),10)], der sich mit dem elastischen $He^3$-$He^3$ Querschnitt vergleichen läßt, wird man zu der Vermutung geführt, daß sich die Ergebnisse der Rechnung durch Einbeziehung eines $\alpha$-2p Kanals in die Streurechnung verbessern lassen. Auch vom Standpunkt des Clustermodells aus ist es verständlich, daß neben der $He^3$-$He^3$ Struktur noch eine $\alpha$-2p Struktur wesentlich am Streuvorgang beteiligt ist. Einerseits ist die Anregung der $\alpha$-2p Struktur, wegen der großen Bindungsenergie des $\alpha$ Teilchens energetisch

möglich und andererseits überlappen sich die beiden Strukturen im Reaktionsraum, wie in Punkt 2.4 noch näher ausgeführt werden wird.

Auf diese Weise gelangt man zu einer Zweikanalnäherung für die elastische $He^3$-$He^3$ Streuung. Für die Wellenfunktion $\psi$ wird der Ansatz $\psi = \psi_I + \psi_{II}$ gemacht.

$\psi_I$ beschreibt den $He^3$-$He^3$ Kanal und $\psi_{II}$ den $\alpha$-Diprotonkanal. Die Funktion $\psi_I$ und $\psi_{II}$ haben im Einzelnen folgende Gestalt:

$$\psi_I = \phi^{(1)}_{He^3} \phi^{(2)}_{He^3} \chi_I \xi_I \eta_I$$

und

$$\psi_{II} = \phi_\alpha \phi_{2p} \chi_{II} \xi_{II} \eta_{II}$$

Dabei werden die Funktionen $\phi_{He^3}$, $\phi_\alpha$, $\phi_{2p}$, die die interne Struktur des entsprechenden Clusters beschreiben, durch die folgenden Funktionen angenähert.

$$\phi^{(1)}_{He^3} = \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{3}(\kappa_i - \kappa^{(1)}_{He^3})^2\right]$$

$$\phi^{(2)}_{He^3} = \exp\left[-\frac{\alpha}{2}\sum_{i=4}^{6}(\kappa_i - \kappa^{(2)}_{He^3})^2\right]$$

$$\phi_\alpha = \exp\left[-\frac{\bar{\alpha}}{2}\sum_{i=1}^{3}(\kappa_i - \kappa_\alpha)^2 + (\kappa_6 - \kappa_\alpha)^2\right]$$

$$\phi_{2p} = \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{i=4}^{5}(\kappa_i - \kappa_{2p})^2\right]$$

$$\mathcal{R}^{(1)}_{He^3} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3\right)$$

$$\mathcal{R}^{(2)}_{He^3} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5 + \mathcal{R}_6\right)$$

$$\mathcal{R}_\alpha = \frac{1}{4}\left(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_6\right)$$

$$\mathcal{R}_{2p} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5\right)$$

Die Weiteparameter sind an die Ausdehnung der entsprechenden freien Teilchen angepaßt außer bei $\phi_{2p}$. Sie werden im Verlaufe der Rechnung konstant gehalten, um die fehlende Sättigungseigenschaft der Kernkräfte näherungsweise zu kompensieren. Die im Ansatz für $\psi$ zunächst noch unbestimmten Funktionen $\chi_I$ und $\chi_{\underline{I}}$ beschreiben die Relativbewegung der Cluster im ersten bzw. zweiten Kanal gegeneinander. Sie hängen infolgedessen nur von den jeweiligen Relativkoordinaten

$$\mathcal{R}_I = \mathcal{R}^{(1)}_{He^3} - \mathcal{R}^{(2)}_{He^3} \quad , \quad \mathcal{R}_{\underline{I}} = \mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_{2p}$$

ab. Die sonst nicht exakt lösbare Schrödingergleichung wird unter Verwendung des Raleigh-Schrödingerschen Variationsprinzips für den hier gemachten Ansatz für $\psi$ auf eine für die Funktionen $\chi_I$ und $\chi_{\underline{I}}$ lösbare Form reduziert.

Die Spin- und Isospinkonfiguration des vorliegenden 6-Nukleonensystems wird durch die Funktionen $\xi_I$, $\eta_I$, $\xi_{\underline{II}}$, $\eta_{\underline{II}}$ gegeben.

$$\xi_I = \xi_{\underline{II}} = \delta_+(1)\,\delta_-(2)\,\delta_+(3)\,\delta_+(4)\,\delta_-(5)\,\delta_-(6)$$

$$\eta_I = \eta_{\underline{II}} = \tau_+(1)\,\tau_+(2)\,\tau_-(3)\,\tau_+(4)\,\tau_+(5)\,\tau_-(6)$$

## 2.3. Die Konsequenzen der Antisymmetrisierung

Die in der Natur vorkommenden Zustände eines Mehrteilchensystems bestehend aus Fermionen genügen dem Pauliprinzip. Das entsprechende Symmetrieverhalten der Wellenfunktion gegenüber Teilchenpermutationen erreicht man durch Antisymmetrisierung mit Hilfe des Operators

$$A = \sum_{i=1}^{720} (-1)^{V_i} P_i$$

dabei sind die $P_i$ die Permutationen auf 6 Elementen. In ihrer Gesamtheit bilden sie bezüglich Nacheinanderausführung die symmetrische Gruppe $\gamma^6$. Der Exponent $V_i$ ist entweder 2 oder 1, je nachdem ob die Permutation $P_i$ gerade oder ungerade ist. Die vollständige Berücksichtigung des Pauliprinzips durch die Antisymmetrisierung bewirkt, daß der hier gemachte Ansatz für $\psi$, der der Einfachheit halber aus Mischungen von Eigenfunktionen zu verschiedenem Spin, Isospin und verschiedener Parität besteht, auf Eigenfunktionen zum Spin, Isospin und zur Parität projeziert wird. Das ist insofern von Bedeutung, als der Spin, der Isospin und die Parität Erhaltungsgrößen des vorliegenden Systems sind. Die Schrödingergleichung läßt sich dadurch in ein System von Eigenwertgleichungen separieren. Die einzelnen Gleichungen, deren jede einem Satz "guter" Quantenzahlen entspricht, sind im allgemeinen leichter lösbar als das ursprünglich komplexe Problem.

Im folgenden wird die Wirkung der Antisymmetrisierung auf $\psi_I$ und $\psi_{II}$ gesondert untersucht werden. Dabei ist die Tatsache wichtig, daß eine Eigenfunktion zum Gesamtspin oder Gesamtisospin durch Antisymmetrisierung nicht zerstört wird.

Durch Anwendung von A auf $\psi_{II}$ erhält man im zweiten Kanal einen Zustand mit S = 0 und T = 1 . Dieses Ergebnis ist wesentlich mit der Ortssymmetrie der internen $\alpha$-Teilchenfunktion und der Diprotonfunktion verknüpft. Der Beweis hierfür wird nicht explizit angegeben. Ähnliche Betrachtungen wurden z.B. in der Arbeit [3] von Wildermuth und McClure durchgeführt. Das $He^3$-$He^3$ System weist insofern eine Besonderheit auf, als durch die Antisymmetrisierung der Spin und die Parität miteinander korreliert werden. Für den Zustand S = 1 existieren nur Ortszustände mit ungerader Parität und für den Zustand S = 0 nur solche mit gerader Parität.

Zerlegt man die Ortsfunktion in Drehimpulszustände, so bedeutet diese Korrelation, daß sich Zustände zum Gesamtspin S = 1 und ungerade Drehimpulse einerseits und S = 0 und gerade Drehimpulse andererseits entsprechen. Für den expliziten Beweis dieser Beziehung wird die folgende Eigenschaft $\ell$ von A benutzt.

$\ell$: Es sei

$$\left( \sum_i (-1)^{\nu_i} P_i \right) \psi \equiv 0$$

Die $P_i$ bilden irgend eine Untermenge von Permutationen aus $\mathcal{S}^n$ und $\psi$ sei eine n-Teilchen Wellenfunktion. Daraus folgt: $A\,\psi \equiv 0$

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß $A(-1)^{\nu_i}P_i = A$ (*) ist. A enthält alle Permutationen aus $\mathcal{S}^n$ und eine Multiplikation mit $P_i$ läuft nur auf eine Vertauschung der $P_j$ aus A hinaus. Der Faktor $(-1)^{\nu_i}$ ist ein homomorphes Bild der gesamten Permutationsgruppe $\mathcal{S}^n$, so daß die in der rechten Seite der Gleichung (*) auftretenden Permutationen auch mit den richtigen Vorzeichen versehen sind.

Zum weiteren Beweis der Spin-Paritätsrelation betrachtet man die Funktion

$$\psi_0 = \phi^{(1)}_{He^3}\,\phi^{(2)}_{He^3}\,\chi^{(4)}_I\,\xi_1\,\eta_I$$

Dabei ist $\chi^+_I$ der Anteil von $\chi_I$, der positive Parität besitzt, und

$$\xi_1 = \Big(\delta_+(1)\delta_-(2) - \delta_-(1)\delta_+(2)\Big)\Big(\delta_+(4)\delta_+(5) - \delta_-(4)\delta_+(5)\Big)\Big(\delta_+(3)\delta_-(6) + \delta_-(3)\delta_+(6)\Big)$$

eine Spineigenfunktion zu S = 1. Mit Hilfe der Eigenschaft $\xi$ kann leicht $A\,\psi_0 \equiv 0$ gezeigt werden. Als Untermenge von Permutationen kann die identische Permutation und P = (14) (25) (36) verwendet werden. P ist ungerade, so daß $(-1)^{\nu} = -1$ ist. Die Anwendung von 1-P auf $\psi_0$ ergibt $(1-P)\,\psi_0 = \psi_0 - \psi_0 \equiv 0$ und auf Grund von $\xi$ ist auch $A\,\psi_0 \equiv 0$. Die Antisymmetrisierung löscht demnach den

Anteil der Ortsfunktion mit positiver Parität aus, falls man voraussetzt, daß sich das $He^3$-$He^3$ System in einem Eigenzustand zum Gesamtspin S = 1 befindet. Diese Relation ist umkehrbar, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll. Ähnlich verläuft der Beweis im Falle S = 0 und gerade Parität.

## 2.4. Die Clusterstruktur des Reaktionskanals

Während der Ansatz für $\psi_I$ durch die beiden $He^3$ Kerne im elastischen Streukanal in eindeutiger Weise vorgegeben ist, können für die Festlegung von $\psi_{II}$ teilweise nur physikalisch plausible Argumente geltend gemacht werden. Wegen der relativ großen Bindungsenergie des α-Teilchens können aus energetischen Gründen mehrere α-Teilchencluster enthaltende Strukturen an der $He^3$-$He^3$ Streuung beteiligt sein. Für eine genaue Beschreibung des Reaktionsmechanismus der Reaktionen $He^3(He^3, \alpha)2p$ bzw. $He^3(He^3,Li^5)p$ müßte man sogar den Dreikörperzerfall α-p-p mit in die Rechnung einbeziehen, da sowohl für $Li^5$ als auch für das Diproton keine gebundenen Zustände existieren. Der hierfür erforderliche Rechenaufwand ist unangemessen groß, falls man sich nicht auf allzugrobe Näherungen einlassen will. In der hier durchgeführten Untersuchung wird deshalb auf eine genaue Beschreibung der an der elastischen $He^3$-$He^3$ Streuung beteiligten Reaktionskanäle verzichtet. In Bezug auf die elastische $He^3$-$He^3$

Streuung erscheint es jedoch sinnvoll, daß eine Zweikanalnäherung gegenüber einer Einkanalnäherung bessere Ergebnisse liefert, wenn von den im Rahmen der Clusterdarstellungen möglichen α-Diproton Strukturen diejenige für den zweiten Kanal ausgewählt wird, die am stärksten an die $He^3$-$He^3$ Struktur gekoppelt ist. Für die Untersuchung, die zur Auswahl von $\psi_{II}$ füh wird der bei der Streuung entstehende $Be^6$ Zwischenkern zweckmäßigerweise in einer α-Diproton Clusterdarstellung betrachtet. Die α-Diproton Clusterfunktionen bilden für den $Be^6$ Kern ein vollständiges Funktionensystem, falls alle Anregungszustände des α-Teilchens und des Diprotons mit einbezogen werden.

Die Vollständigkeit des Funktionensystems für den $Be^6$ Kern bewirkt, daß z. B. auch $Li^5$-Proton Strukturen implizit berücksichtigt werden, wenn der Ansatz für $\psi_{II}$ aus einer Untersuchung der α-Diprotonstrukturen hervorgeht. Zunächst werden die α-Diprotonstrukturen in zwei Klassen eingeteilt, die sich dadurch unterscheiden, daß die erste alle Anregungszustände des α-Teilchens enthält, während in der zweiten das α-Teilchen sich im Grundzustand aufhält. Der niedrigste Zustand des α-Teilchens ist gegenüber den Anregungszuständen durch die Ortssymmetrie der vier Nukleonen ausgezeichnet. Da im $He^3$-$He^3$ System die Nukleonen mit hoher Symmetrie korreliert sind, erwartet man anschaulich, daß die Überlappung dieses Systems mit einer Clusterfunktion aus der zweiten Klasse größer sein wird als mit einem Vertreter der weniger symmetrischen ersten Klasse.

Von denjenigen Clusterstrukturen, die das α-Teilchen im

Grundzustand enthalten ist diejenige bezüglich der Überlappung mit dem elastischen $He^3$-$He^3$ Kanal bevorzugt, die das Diproton in einem Zustand enthält, indem die beiden Protonen zu einem relativen Drehimpulszustand l = 0 gekoppelt sind. Diese Protonenkonfiguration ist der der Protonen im $He^3$ am ähnlichsten. In Drehimpulszuständen mit $l > 0$ ist der mittlere Abstand der Protonen größer als im Zustand mit l = 0. Eine Berechnung der Übergangsmatrixelemente zwischen dem $He^3$-$He^3$ System und einem $\alpha$-Diprotonsystem mit einem Triplett Diproton ergab, daß diese beiden Strukturen nur über die Spin- und Isospinaustauschkräfte miteinander koppeln.

Da sowohl das $\alpha$ Teilchen als auch das Singulettdiproton den Spin S = 0 besitzen, ergibt sich für den Gesamtspin im zweiten Kanal ebenfalls S = 0. Das bedeutet, daß der zweite Kanal nur an die S = 0 Zustände des $He^3$-$He^3$ Systems gekoppelt ist, da der Hamiltonoperator weder Spin-Bahn noch Tensorpotentiale enthält und deshalb mit dem Operator des Gesamtspins vertauschbar ist.

## 2.5. Die Konstruktion der gekoppelten Integro-Differentialgleichungen

Tragen wir den Ansatz für $\psi$ in die Schrödingersche Variationsgleichung ein, integrieren über die internen Clusterkoordinaten und summieren über die Spin- und Isospinkoordinaten, so erhalten wir zur Bestimmung der beiden Rela-

tivfunktionen $\chi_I$ und $\chi_{II}$ zwei gekoppelte lineare Integrodifferentialgleichungen folgender Form:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_I}\frac{\partial^2}{\partial \vec{R}_I^2} + V_D^{(I)}(|\vec{R}_I|) - E_{rel}^{(I)}\right)\chi_I(\vec{R}_I) = \int K_{11}(\vec{R}_I, \vec{R}_I')\,\chi_I(\vec{R}_I')\,d^3\vec{R}_I' + \int K_{12}(\vec{R}_I, \vec{R}_{II}')\,\chi_{II}(\vec{R}_{II}')\,d^3\vec{R}_{II}' \qquad \text{(I)}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_{II}}\frac{\partial^2}{\partial \vec{R}_{II}^2} + V_D^{II}(|\vec{R}_{II}|) - E_{rel}^{II}\right)\chi_{II}(\vec{R}_{II}) = \int K_{21}(\vec{R}_{II}, \vec{R}_I')\,\chi_I(\vec{R}_I')\,d^3\vec{R}_I' + \int K_{22}(\vec{R}_{II}, \vec{R}_{II}')\,\chi_{II}(\vec{R}_{II}')\,d^3\vec{R}_{II}' \qquad \text{(II)}$$

Dabei sind $E^I_{rel}$, $E^{II}_{rel}$ die kinetischen Energien (Schwerpunktsystem) im ersten bzw. zweiten Kanal, falls die Abstände der Cluster gegeneinander so groß sind, daß keine Wechselwirkung mehr zwischen ihnen besteht. $V_D$ ist das Direktpotential, das nur vom Abstand $|\vec{R}_I|$, bzw. $|\vec{R}_{II}|$ der Cluster abhängt. Die nichtlokalen Anteile des Potentials $K_{11}$, $K_{22}$ ergeben sich aus der Austauschtermen der Wellenfunktion $\psi$ . Die Potentiale $K_{12}$, $K_{21}$ koppeln die beiden Kanäle aneinander.

Im folgenden wird die Berechnung der Integralkerne etwas genauer betrachtet, insbesondere was ihre Behandlung mittels der Rechenanlage CDC 3200 betrifft. Die Integralkerne setzen sich aus einer Summe von Integralen folgenden Typs zusammen:

$$I = \int \phi^{(1)}_{He^3}\,\phi^{(2)}_{He^3}\,V_{ij}\,P_\nu(\phi_\alpha\,\phi_{2\rho})\,d^3\xi \qquad (\text{Kern } K_{12},\ P_\nu \in \gamma^6)$$

Das Integrationsvolumen umfaßt den 9-dimensionalen Raum der drei Relativkoordinaten, die zusammen mit $\mathfrak{R}_I$ und $\mathfrak{R}_I'$ ein Basissystem der Ortskoordinaten des 6-Teilchensystems in dessen Schwerpunktssystem bilden. Die im Integral I auftretenden Terme sind als Funktionen der Teilchenkoordinaten $\mathfrak{r}_j$ gegeben. Es ist daher zur Durchführung der Integration notwendig, die $\mathfrak{r}_i$ in Relativkoordinaten $\mathfrak{s}_i$ zu transformieren. Die Transformation ist linear:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{s}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{s}_6 \end{pmatrix} = (t_{ik}) \begin{pmatrix} \mathfrak{r}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{r}_6 \end{pmatrix}$$

Die $6 \times 6$ Matrix $t_{ik}$ konstruiert man wie folgt:

$t_{6,k} = \frac{1}{6}$ $\quad (k = 1, \ldots, 6)$

$t_{5,k} = \frac{1}{3}$ $\quad (k = 1, 2, 3)$

$t_{5,k+3} = -\frac{1}{3}$ $\quad (k = 1, 2, 3)$

$t_{4,k} = -\frac{1}{4}$ $\quad (k = 1, 2, 3, 6)$

$t_{4,k} = \frac{1}{2}$ $\quad (k = 4, 5)$

Diese $t_{ik}$ ergeben sich aus den Forderungen:

$\mathfrak{s}_4 = \mathfrak{R}_{II}'$

$\mathfrak{s}_5 = \mathfrak{R}_I$

$\mathfrak{s}_6 = \mathfrak{f}$ (Schwerpunkt)

Für $P_\nu$ ist die identische Permutation angenommen.

Die $t_{ik}$ ($i = 1, 2, 3, ; k = 1, \ldots, 6$) müssen so gewählt werden, daß 1.) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ translationsvariant sind und

2.) die Determinante der Matrix $t_{ik} \neq 0$ ist.

Das wird erreicht durch $t_{ik} = -\frac{1}{6}$, ausgenommen $t_{1,\nu_1} = t_{2,\nu_2} = t_{3,\nu_3} = \frac{5}{6}$; . Dabei kennzeichnen $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ die Komplementärspalten zu den Spalten

$$\begin{pmatrix} t_{4,\mu_1} \\ t_{5,\mu_1} \\ t_{6,\mu_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_{4,\mu_2} \\ t_{5,\mu_2} \\ t_{6,\mu_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_{4,\mu_3} \\ t_{5,\mu_3} \\ t_{6,\mu_3} \end{pmatrix}$$

deren Determinante $\neq 0$ ist. Im vorliegenden Fall kann man $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 4$ setzen.

Das Integral I nimmt mit dem in Punkt 2.2 gemachten Ansatz für die Wellenfunktion die etwas speziellere Form $I = \int \exp(-X'EX) d^3\Omega$ an; dabei ist $X = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \vdots \\ \varrho_6 \end{pmatrix}$, $E = (e_{ik})$. Nach Transformation in Relativkoordinaten $y = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \vdots \\ \varrho_6 \end{pmatrix}$ wird daraus $I = \int \exp(-y(T^{-1})'ET^{-1}y)\, d^3\Omega$

Die Matrix $F = (T^{-1})' E(T^{-1})$ ist eine 5x5-Matrix, da die in I auftretenden Funktionen sämtlich translationsinvariant sind und somit nicht von der Schwerpunktskoordinate $\varrho_6$ abhängen. Nach dem Diagonalisieren der Matrix F können die Integrationen auf elementare Weise durchgeführt werden.

Die Berechnung der Matrixelemente der kinetischen Energie ist etwas komplizierter, jedoch im Prinzip ähnlich der von I. Die oben beschriebene Methode zur Gewinnung der Integrale vom Typ I wurde mittels eines Fortran-Programms auf

die elektronische Rechenanlage CDC 3200 übertragen. Die entsprechenden 7 Subroutinen INKA, INFRA, DIRA, DIAGO, TRANS, INVER, GESI sind im Anhang wiedergegeben. Als Eingangsgrößen für das Programm sind lediglich die Permutation $P_\nu$, eine Idendifikationsziffer für den Integraltyp (Norm, Zweiteilchenpotential, kinetische Energie) und die Nummer des Integralkernes notwendig.

Nach Summation über die Spin- und Isospinkoordinaten in der Schrödingerschen Variationsgleichung erhält man 512 Integrale vom Typ I, die jedoch nicht alle untereinander verschieden sind. Mittels eines Fortran-Programms wurde eine Einteilung in Klassen gleicher Integrale vorgenommen, um bei der Berechnung der Potentiale Summen über gleiche Integrale auszuschließen, was sich günstig auf den Zeitbedarf und die Genauigkeit der numerischen Rechnungen auswirkt. Die Klassifizierung erfolgte anhand von Symmetrieeigenschaften der Integrale gegenüber gewissen Permutationen. Das Verfahren soll am Beispiel des "Übergangskernes" $K_{12}$ genauer erläutert werden.
Der Kopplungsterm $\int k_{12}(\mathfrak{x}_I, \mathfrak{x}_{II}') \gamma_{II}(\mathfrak{x}_{II}') d^3\mathfrak{x}_{II}'$ aus Gleichung (I) sowie die einzelnen Summanden aus denen er sich aufbaut, sind Funktionen die nur von $\mathfrak{x}_I$ abhängen. Aus diesem Grunde wird sich jede der einzelnen Funktionen nicht ändern, wenn man die Teilchenkoordinaten derart ändert, daß $\mathfrak{x}_I$ invariant bleibt. Eine solche Permutation bewirkt lediglich eine Transformation $(t_{ik})$ der Integrationsvariablen mit $det(t_{ik}) = \pm 1$ wodurch der Wert eines Integrals

nicht geändert wird. Die Gesamtheit der Permutationen, die $\mathcal{R}_I$ invariant lassen, besteht aus einer Untegruppe $\mathcal{U}$ von $\mathcal{S}^6$, die das direkte Produkt aus $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ ist, wobei $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ aus denjenigen Permutationen bestehen, die den ersten bzw. zweiten $He^3$ Cluster als ganzen ungeändert lassen. Die Ordnung von $\mathcal{U}$ ist 36.

Zum Zweiten wird eine Symmetrieeigenschaft des Anfangszustandes

$$P_\nu \left( \phi_\alpha \phi_{2p} \chi_{II}(\mathcal{R}_I) \right)$$

benützt.

Dieser Zustand ist invariant bei Permutationen, die $\mathcal{R}'_{II} = P_\nu \mathcal{R}_{II}$ nicht ändern. Zwei Integrale sind demnach gleich, wenn sie durch mindestens eine der Permutationen wie sie oben definiert wurden, ineinander übergeführt werden können. Auf diese Weise werden die 512 Integrale auf ca. 50 verschiedene reduziert, aus denen schließlich die Gleichungen (I) und (II) konstruiert werden.

## 2.6. Die Lösung der Radialgleichungen

In dieser Form jedoch sind die Gleichungen (I) und (II) zur Bestimmung der Funktionen $\chi_I$ und $\chi_{II}$ einer direkten numerischen Behandlung nicht zugänglich, da ihre Lösungsmannigfaltigkeit zu groß ist. Beachtet man, daß bei Zentralkräften der Drehimpuls des Gesamtsystems eine Erhaltungsgröße ist, so wird eine Zerlegung von $\chi_I$ und $\chi_{II}$

in Drehimpulseigenfunktionen nahegelegt. Als Folge davon gehen die beiden Gleichungen (I) und (II) in ein unendliches System von paarweise gekoppelten linearen Integro-Differentialgleichungen für die Radialanteile der Eigenfunktionen über. Die hierfür erforderlichen Transformationen der Integralkerne $K_{11}$, $K_{12}$, $K_{21}$, $K_{22}$ werden hier nicht näher beschrieben. Sie sind von der Art, wie sie K. Wildermuth, E. Schmid und Y. C. Tang in einer Einkanalrechnung [4] verwenden. Sie wurden lediglich etwas verallgemeinert, so daß sie auch für die Zweikanalrechnung anwendbar wurden. Das zu je einem Drehimpuls gehörige gekoppelte Gleichungspaar hat die folgende Gestalt

a) $$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V_1(r) + k_1^2\right) u^{(\ell)}(r) = \int_0^\infty L_{11}^{(\ell)}(r,r')\, u^{(\ell)}(r')\, dr' + \int_0^\infty L_{12}^{(\ell)}(r,r')\, v^{(\ell)}(r')\, dr'$$

b) $$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V_2(r) + k_2^2\right) v^{(\ell)}(r) = \int_0^\infty L_{21}^{(\ell)}(r,r')\, u^{(\ell)}(r')\, dr' + \int_0^\infty L_{22}^{(\ell)}(r,r')\, v^{(\ell)}(r')\, dr'$$

Diese Gleichungen wurden numerisch für die ersten sechs Drehimpulse gelöst. Für die Drehimpulse mit $l > 5$ sind im Bereich der hier betrachteten Streuenergien die Abstände der Cluster größer, als die Reichweite der Kernkräfte, so daß die durch die Kernpotentiale verursachte Phasenver-

schiebung der l-ten Partialwelle so klein ist, daß sie gleich null gesetzt werden kann. Für die Lösung der Gleichungen a) und b) unterteilt man den Bereich $0 \leq r < \infty$ in drei Abschnitte

1) $0 \leq r \leq R_1$

2) $R_1 \leq r \leq R_2$

3) $R_2 \leq r < \infty$

$R_1$ definiert die Reichweite der nichtlokalen Potentiale, so daß man außerhalb $R_1$ $L_{11} = L_{12} = L_{21} = L_{22} = 0$ setzen kann. $R_2$ wurde so gewählt, daß im Gebiet 3) die Gleichungen a) und b) nur noch die Coulombpotentiale enthalten.

Im Bereich 1) wurde für die numerische Lösung der Gleichungen a) und b) eine Methode von Robertson [14] angewandt. Auf diese Weise gelangt man zu einem linearen inhomogenen Gleichungssystem: $AZ = B$ mit

$$A = (a_{ik}) \quad (i,k = 1, \dots, 2N)$$

$$B = b_j \quad (j = 1, \dots 2N)$$

$$Z = \left(u(r_i)_{i=1,\dots N}, v(r_k)_{k=1,\dots,N}\right)$$

$r_{i,k}$ sind die äquidistanten Stützstellen im Bereich 1 und N+2, deren Anzahl. Die Inhomogenität B ergibt sich aus den Anfangsbedingungen der Lösungen $u(r)$ und $v(r)$. Es wird $u(0) = v(0) = 0$ und $u(r_0) = u_0$, $v(\xi) = v_0$ gesetzt, wobei $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ aber sonst beliebig sind. Durch Vorgabe

dieser beiden Funktionswerte für u und v ist die eindeutige Lösbarkeit der Differentialgleichungen zweiter Ordnung a) und b) gewährleistet. Für die Anzahl N+2 der Stützstellen im Intervall $0 \leq r \leq R_1$ ergibt sich eine untere Schranke einerseits aus der Forderung, daß ihr Abstand $\varepsilon$ hinreichend klein sein muß, um der Variation der Integralkerne angemessen zu sein, und andererseits daraus, daß das Intervall so groß ist, daß die Integralkerne an der Grenze $R_1$ hinreichend klein sind. Auf Grund dieser Bedingungen gelangt man zu einer minimalen Dimension der Matrix A von 60 x 60. Der Kernspeicher der Anlage CDC 3200 war nicht ausreichend, um ein Gleichungssystem dieser Größe direkt zu lösen, da ein großer Teil des Speichers gleichzeitig von den übrigen Programmteilen der Clusterrechnung besetzt wird. Aus diesem Grunde wurde zur Lösung der Gleichung $AZ = B$ eine platzsparende Methode angewandt, die sich auch auf Mehrkanalrechnungen verallgemeinern läßt. Die Matrix A zerfällt in natürlicher Weise in vier Untermatrizen $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ mit der Dimension N x N.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{11}$ beschreibt die elastische $He^3$-$He^3$ Streuung (Einkanalrechnung), $A_{22}$ die elastische $\alpha$-dp Streuung und $A_{12}$, $A_{21}$ enthalten die Kopplungsterme der beiden Kanäle. Setzt man $Z = (X,Y)$ und $B = (B_1, B_2)$, so geht das Gleichungssystem in

$$A_{11}X + A_{12}Y = B_1$$

$$A_{21}X + A_{22}Y = B_2$$

über.

Aus den ersten N Gleichungen wird X elliminiert:

$$X = A_{11}^{-1} B_1 - A_{11}^{-1} A_{12}Y := B_1' + A_{12}'Y$$

und in die Gleichungen N+1 bis 2N eingetragen:

$$A_{21}B_1' + (A_{21}A_{12}' + A_{22})\ Y = B_2 \quad \text{oder} \quad A_{22}'\ Y = B_2'$$

Auf diese Weise erhält man zur Bestimmung von Y ein Gleichungssystem mit einer N x N Koeffizientenmatrix $A_{22}'$.

Die Relativfunktion X des $He^3$-$He^3$ Kanals wird dann aus

$$X = B_1' + A_{12}'\ Y$$

berechnet. Das diese Prozedur enthaltende Fortran Programm "GESI" ist im Anhang wiedergegeben.

Im Bereich 2) werden die Gleichungen a) und b) nach einem einfachen von Fox und Goodwin [13] angegebenen Iterationsverfahren gelöst. Die beiden Gleichungen sind in diesem Abschnitt bereits entkoppelt ($L_{11} = L_{12} = L_{21} \neq L_{22} = 0$) so daß jede Gleichung für sich integriert werden kann.

Für $r \geq R_2$ enthalten beide Gleichungen nur noch das Coulombpotential; die von den Kernkräften herrührenden Anteile des Potentials sind in diesem Abschnitt gleich Null. Die Gleichungen a) und b) nehmen die Form:

a') $\left(\frac{d^2}{d\varrho_I^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\varrho_I^2} - \frac{2\eta_I}{\varrho_I} + 1\right) u(\varrho_I) = 0$

b') $\left(\frac{d^2}{d\varrho_{II}^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\varrho_{II}^2} - \frac{2\eta_{II}}{\varrho_{II}} + 1\right) v(\varrho_{II}) = 0$ mit

$\eta_I = \frac{4\mu_I e^2}{\hbar^2 k_1}$ , $\eta_{II} = \frac{4\mu_{II} e^2}{\hbar^2 k_2}$ , $\varrho_1 = k_1 r$ , $\varrho_2 = k_2 r$ an

deren Lösungen bekannt sind.[17]. Zwei unabhängige Lösungen zur Darstellung aller Lösungen der Gleichung a') bzw. b') sind die reguläre und die irreguläre Coulombfunktion $g_\ell$ und $f_\ell$ , die sich für $r \to \infty$ wie

$$f_\ell \sim \sin(\varrho - \tfrac{\pi}{2}\ell - \eta \ln 2\varrho + \sigma_\ell)$$

und $$g_\ell \sim \cos(\varrho - \tfrac{\pi}{2}\ell - \eta \ln 2\varrho + \sigma_\ell)$$

verhalten. Die Funktionen $f_\ell$ und $g_\ell$ wurden nach einer Methode von Fröhberg [15] berechnet. Besser geeignet ist jedoch eine Lösungsbasis, die aus einer Linearkombination der Funktionen $f_\ell$ und $g_\ell$ hervorgeht.

$$A^\ell = g_\ell + i f_\ell \quad , \quad E^\ell = -g_\ell + i f_\ell$$

$E^\ell$ entspricht einer einlaufenden Welle, $A^\ell$ einer auslaufenden Welle.

Zur Darstellung der allgemeinen Lösung des Gleichungssystems a), b) im ganzen Bereich $0 \leq r < \infty$ benötigt man zwei unabhängige Lösungen:

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ v^{(1)} \end{pmatrix} \quad , \quad U^{(2)} = \begin{pmatrix} u^{(2)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix}$$

Dabei bedeutet die Unabhängigkeit, daß es kein Zahlenpaar $(r,s) \neq (0,0)$ gibt, für das gilt:

$$r\,U^{(1)} + s\,U^{(2)} \equiv 0$$

Diese Bedingung ist für zwei Lösungen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ erfüllt, wenn die Anfangsbedingungen

$$u^{(1)}(r_1)=u_o \; , \; u^{(2)}(r_1)=v_o \; , \; v_1^{(1)}(r_1)=v_o \; , \; v^{(2)}(r_1)=u_o$$

gewählt werden;

$(0 \neq u_o \neq v_o \neq 0 \; ; \quad$ z.B. $u_o = 1.1 \; , \; v_o = 0.9 \; )$

dabei ist $r_1$ der zweite Stützpunkt im Intervall $0 \leq r \leq R_1$. Am ersten Stützpunkt werden beide Funktionen gleich Null gesetzt. Die beiden Lösungen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ erhält man durch zweimaliges Integrieren für alle $r \geq 0$ mit den oben genannten Anfangsbedingungen.

## 2.7. Die Berechnung der komplexen Streuphasen $\delta_\ell$

Die der physikalischen Situation der $He^3$-$He^3$ Streuung angepaßte Lösung von a) und b) entsteht aus einer Linearkombination von $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$: $U = cU^{(1)} + dU^{(2)}$ da alle Lösungen von a) und b) auf diese Weise aufgebaut werden können. Beachten wir die Zerlegung von $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ in einlaufende

und auslaufende Welle, so kann man $U$ schreiben als

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_I^{(1)} A_I^{(\ell)} + e_I^{(1)} E_I^{(\ell)} \\ a_{\underline{I}}^{(1)} A_{\underline{I}}^{(\ell)} + e_{\underline{I}} E_{\underline{I}}^{\ell} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} a_I^{(2)} A_I^{(\ell)} + e_I^{(2)} E_I^{(\ell)} \\ a_{\underline{I}}^{(2)} A_{\underline{I}}^{(\ell)} + e_{\underline{I}} E_{\underline{I}}^{(\ell)} \end{pmatrix}$$

im asymptotischen Bereich $r > R_2$

Bevor c und d bestimmt wird, kann man $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ so normieren, daß $e_I^{(1)} = e_{\underline{I}}^{(2)} =$ 1 wird. Setzt man noch die Normierung der im ersten Kanal einlaufenden Welle gleich 1 und bedenkt, daß der zweite Kanal ( $\alpha$ - 2p) keine einlaufende Welle entsprechend dem hier betrachteten Streuexperiment besitzen kann, so erhält man zur Bestimmung der beiden Konstanten c und d die Gleichungen

$$c + d = 1$$

und $$c\, e_{\underline{I}}^{(1)} + d\, e_{\underline{I}}^{(2)} = 0$$

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes, dessen Kenntnis einen Vergleich mit den experimentellen Resultaten gestattet, müssen die Streuphasen $\delta_\ell$ bekannt sein, die durch das S-Matrixelement der $He^3$-$He^3$ Streuung $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ definiert sind. $S_\ell$ ergibt sich zu $S_\ell = c\, a_I^{(1)} + d\, a_I^{(2)}$ $\delta_\ell$ ist im allgemeinen komplex und nur dann reell, wenn keine Absorption vorliegt.

Da die Amplitude der einlaufenden Partialwelle im ersten Kanal auf 1 normiert wurde, ist $S_\ell$ die Amplitude der aus-

laufenden Partialwelle desselben Kanals. Aus der oben konstruierten Lösung $U$ ergibt sich die Amplitude der auslaufenden Partialwelle im $\alpha$ -dp Kanal zu

$$T_\ell = c\, a_{II}^{(1)} + d\, a_{II}^{(2)}$$

Die Teilchenstromerhaltung, die für die Lösung U aufgrund der Schrödingergleichung gilt, kann dann durch die Beziehung $|S_\ell|^2 + |T_\ell|^2 = 1$ ausgedrückt werden. Dieser Zusammenhang zwischen $S_\ell$ und $T_\ell$ ist zum Test der numerischen Rechnungen benutzt worden.

## 3. Ergebnisse der Rechnung

Um zu Ergebnissen zu gelangen, die mit den experimentellen Resultaten vergleichbar sind, wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der elastischen $He^3$-$He^3$ Streuung aus den Streuphasen $\delta_\ell$ berechnet. Leider liegen nur Messungen für nichtpolarisierte $He^3$-Strahlen und Targets vor, so daß die Querschnitte für Zustände mit S=1 und S=0 nicht gesondert betrachtet werden können. Sie treten in

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} f_T + \frac{1}{4} f_S$$

als Summanden mit entsprechenden statistischen Gewichten $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ auf. Zu $f_T$ tragen nur die Drehimpulszustände mit ungeradem l bei und zu $f_S$ nur diejenigen mit geradem l. Infolge der verschiedenen statistischen Gewichte reagiert $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ auf eine Korrektur der ungeraden Streuphasen $\delta_\ell$ viel empfindlicher als auf eine der geraden, d.h. eine Differenz zwischen den berechneten Streuphasen $\delta_\ell$ und den aus der Phasenanalyse der experimentellen Ergebnisse gewonnenen tritt in $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für Zustände mit S=1 stärker als für diejenigen mit S=0 hervor. Infolge der speziellen Wahl der $\alpha$-Diprotonstruktur im zweiten Kanal werden mit der in dieser Arbeit dargestellten Zweikanalrechnung nur die Zustände mit S=0 des $He^3$-$He^3$ Systems erfaßt. Die Streuphasen $\delta_\ell$ mit ungeradem l wurden im Rahmen der Einkanalnäherung berechnet.

In Fig. 1 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ bei einer Energie von 10 MeV im Schwerpunktsystem wie er

sich aus der Einkanalrechnung ergibt neben dem experimentellen Resultat [16] abgebildet. Fig. 2 zeigt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ als Ergebnis der Zweikanalrechnung. Der Vergleich beider Kurven ergibt, daß durch die Zweikanalrechnung die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im Bereich kleiner Streuwinkel $\vartheta$ verbessert wurde.

Für die Abweichung der berechneten Kurve von den Meßwerten im Bereich des Maximums der Kurve bei etwa $60^{\circ}$ ist hauptsächlich die Streuphase $\delta_3$ verantwortlich. Bei etwa $60^{\circ}$ liegt aus kinematischen Gründen der Ort für ein Maximum der im Drehimpulszustand l=3 und bei einer Schwerpunktsenergie von 10 MeV gestreuten $He^3$ Kerne. Durch das ungewöhnliche Verhalten der Streuphase $\delta_1$ ( $\delta_1$ besitzt bei 10 MeV eine Nullstelle) ist die Streuung im Drehimpulszustand l=1 sehr gering, so daß die Höhe des Maximums bei $60^{\circ}$ überwiegend durch $\delta_3$ bestimmt wird. Diese Phase zeigt im Energiebereich um 10 MeV einen auf einen Resonanzzustand hinweisenden Verlauf. Diese ziemlich breite Resonanz wird durch die Einkanalrechnung offenbar nicht ganz korrekt wiedergegeben. Wie sich aus einer Phasenanalyse der experimentellen Meßwerte [16] ergibt, ist die aus der Einkanalrechnung erhaltene Streuphase $\delta_3 \sim 18^{\circ}$ etwa $10^{\circ}$ zu klein.

Bei den bisherigen Clusterrechnungen wurden bei der Berechnung des Coulombpotentials die Austauschterme der Wellenfunktion mit der Begründung fortgelassen, daß die Coulombkräfte wegen ihrer relativen Kleinheit im Bereich der Kernwechselwirkung vernachlässigt werden können. An Resonanz-

stellen ist dieses Argument nicht mehr zutreffend. (priv. Bemerkung von H. Hackenbroich). Das Coulombpotential wurde deshalb für den Drehimpulszustand l=3 mit der vollantisymmetrisierten Wellenfunktion $\psi_I$ berechnet. Der entsprechende Querschnitt ist in Fig. 3 wiedergegeben. Es ergibt sich eine leichte Verbesserung gegenüber der elastischen Streuung ohne Coulombaustauschterme. Das zugehörige $\delta_3$ beträgt $23^o$.

Den in Fig. 1 bis Fig. 3 dargestellten Wirkungsquerschnitten liegen folgende Parameterwerte der Wellenfunktion und des Zweinukleonenpotentials zugrunde:

$$\alpha_{He^3} = 0.36\ fm^{-2}\ ,\ \alpha_{He^4} = 0.543\ fm^{-2},\ \alpha_{dp} = 0.5\ fm^{-2},\ y=1.2$$

$\alpha_{He^3}$ entspricht den durch Elektronenstreuung bestimmten Radius von $He^3$ [12]. $\alpha_{He^4}$ wurde aus 4.) entnommen.

In Bezug auf den Weiteparameter des Diprotons ergab sich, daß das Resultat der Rechnung weitgehend unempfindlich gegen eine Variation von $\alpha_{dp}$ innerhalb der Grenzen $0.33\ fm^{-2} \leq \alpha_{dp} \leq 0.5\ fm^{-2}$ ist. Der Parameter $y$ für das Zweiteilchenpotential wurde von Tang und Thompson [12] so justiert, daß im Bereich kleiner Streuenergien Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Einkanalrechnung und denen der Experimente vorliegt. In Fig. 4 sind die Imaginärteile der Streuphasen $\delta_0$ und $\delta_2$ als Funktion der Streuenergie aufgezeichnet. Aus diesen Kurven geht hervor, daß für kleine Streuenergien der Einfluß des $\alpha$ -Diprotonkanals

auf die $He^3$-$He^3$ Streuung sehr gering ist. Es wird geshalb der Wert für $\gamma$ aus der Arbeit 12) entnommen. Bei Betrachtung von Fig. 4 fällt ferner auf, daß $Im(\delta_2)$ bei kleinen Energien langsamer ansteigt als $Im(\delta_0)$ . Dieses unterschiedliche Verhalten der Streuphasen $\delta_0$ und $\delta_2$ ist eine Folge der Zentrifugalbarriere - $\frac{l(l+1)}{r^2}$ . Eine weitere interessante Eigenschaft zeigt der Imaginärteil von $\delta_0$ , wenn man dessen Verlauf in Abhängigkeit von $\alpha_{dp}$ bei konstanter Streuenergie verfolgt. $Im(\delta_0)$ besitzt ein flaches Maximum an der Stelle

$$\alpha_{dp} = \alpha_{He^3} = 0.36 fm^{-2}$$

Da der Imaginärteil der Streuphase ein Maß für die Absorption im elastischen Streukanal darstellt, wird durch dieses Ergebnis bestätigt, daß die Überlappung des $\alpha$ -Diprotonkanals mit dem $He^3$-$He^3$ Kanal dann am größten ist, wenn die Korrelation der Protonen im Diproton gleich derjenigen im $He^3$ ist. Damit wird das in Punkt 2.4 angegebene physikalisch plausible Argument, das zur Auswahl eines Singulettdiprotons für $\psi_{\underline{I}}$ führte, nachträglich in einem gewissen Umfang durch die Rechnung gerechtfertigt.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die hier durchgeführte Zweikanalrechnung für die elastische Streuung von $He^3$ an $He^3$ in Bezug auf den gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt bessere Resultate ergibt, als eine Einkanalnäherung.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. K. Wildermuth, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung durch wertvolle Ratschläge.

Herrn Prof. Dr. E. Schmid möchte ich für sein Interesse an dieser Arbeit und für klärende Hinweise danken.

Weiteren Dank schulde ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre finanzielle Unterstützung.

Literaturverzeichnis

1) Wildermuth, K., und Th. Kanellopoulos
Nucl. Phys. 7, 150 (1958)

2) Wildermuth, K., und Th. Kanellopoulos
Nucl. Phys. 9, 499 (1958)

3) Wildermuth, K., und W. McClure
Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 41 (1966)

4) Tang, Y.C., E. Schmid, K. Wildermuth
Phys. Rev. Vol. 131, 6 (1963) 2631

5) Okai, S., und S. C. Park
Phys. Rev. 145 (1966) 787

6) Brandsden, B. H. und R. A. H. Hamilton
Proc. Phys. Soc. (London) 76, 987 (1960)

7) Bredin, D. J. et al.
Proc. Roy. Soc. (London) A 258, 202 (1960)

8) Bacher, A. D. und T. A. Tombrello
Rev. Mod. Phys. Vol. 37, 5 (1965) 433

9) Tombrello, T. A. und A. D. Bacher
Phys. Let. Vol. 17, 1 (1965) 37

10) Aldridge, J. P., B. H. Wildenthal, D. H. Youngblood
Rev. Mod. Phys. Vol. 37, 3 (1965) 430

11) Dirac, P. A. M.
The Principles of Quantum Mechanics (1947)

12) Thompson, D. R. und Y. C. Tang
Phys. Rev. 159 (1967) 806

13) Fox, L. und E. T. Goodwin
Proc. Cambridge Phil. Soc. 45 373 (1949)

14) Robertson, H. H.
Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 538 (1956)

15) Fröberg, C. E.
Rev. Mod. Phys. 27 399 (1955)

16) Gammel, J. L., J. E. Brolley, L. Rosen, L. Stewart
Proc. of the International Conference on Nuclear
Structure, Kingston, Canada (1960) 215

17) Handbook of Mathem. Functions
National Bureau of Standards
Appl. Math. Series 55 p. 537 (1965)

Fig.1 $He^3 - He^3$ Streuung

Einkanal Rechnung

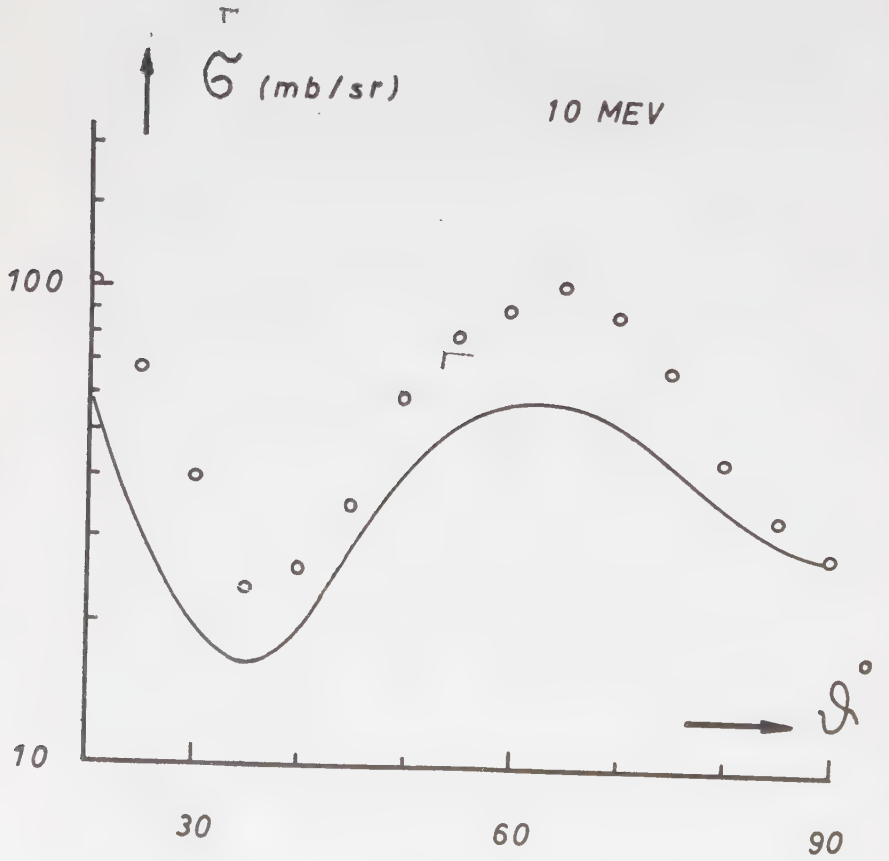


Fig. 2 $He^3 - He^3$ Streuung

Zweikanal Rechnung

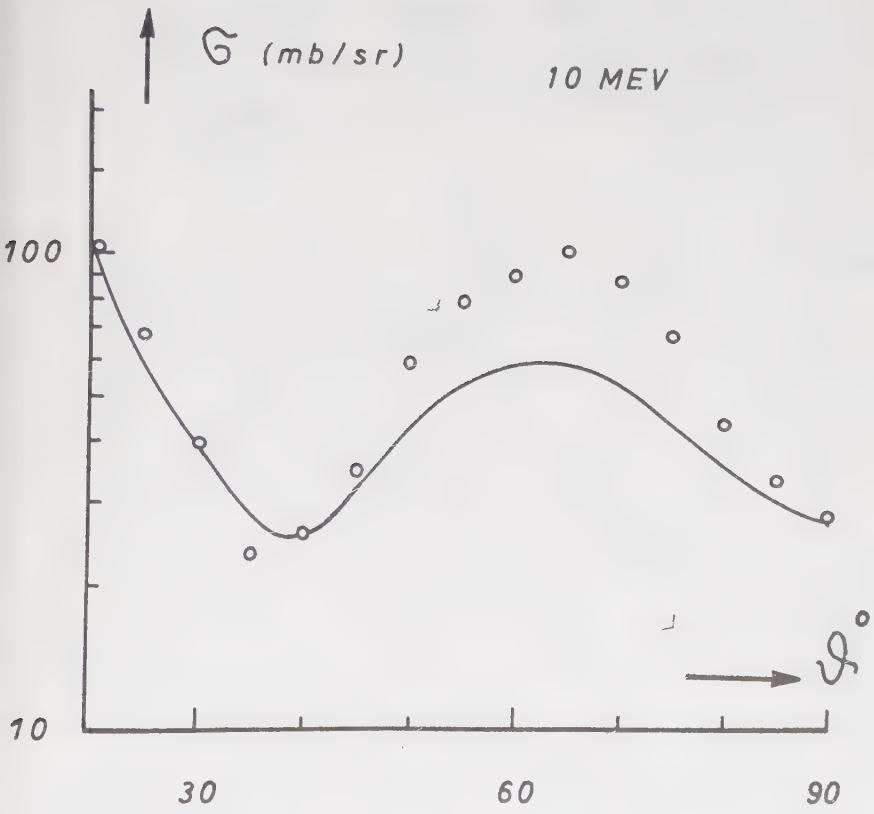
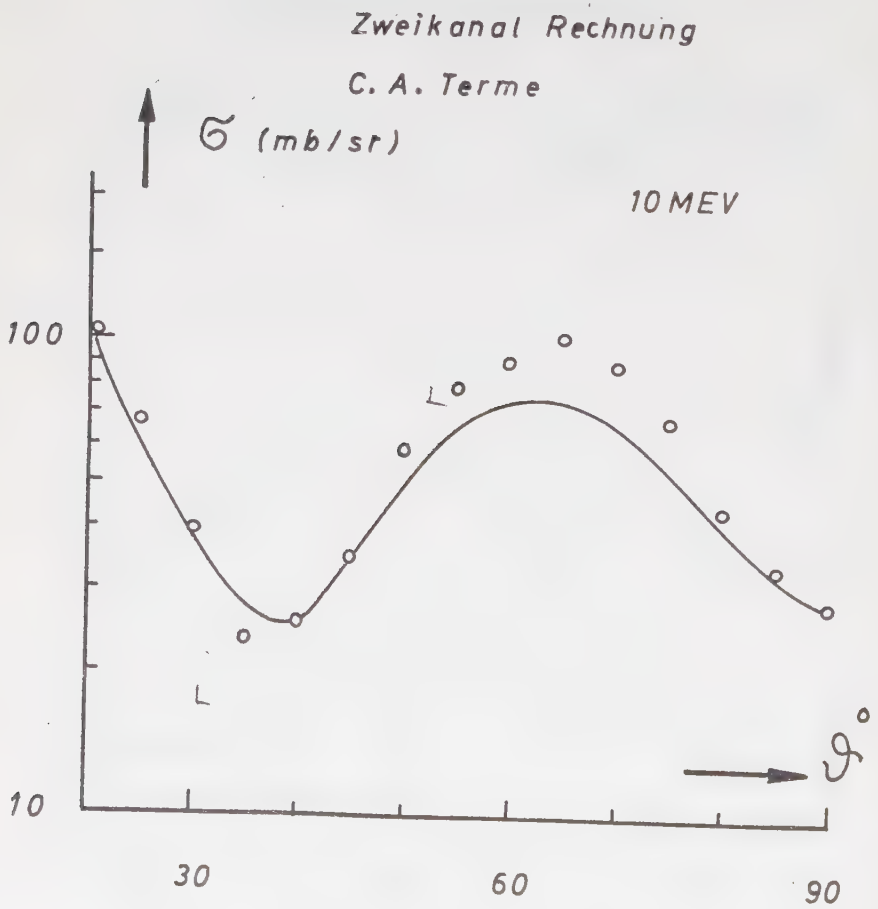


Fig. 3 $He^3 - He^3$ Streuung



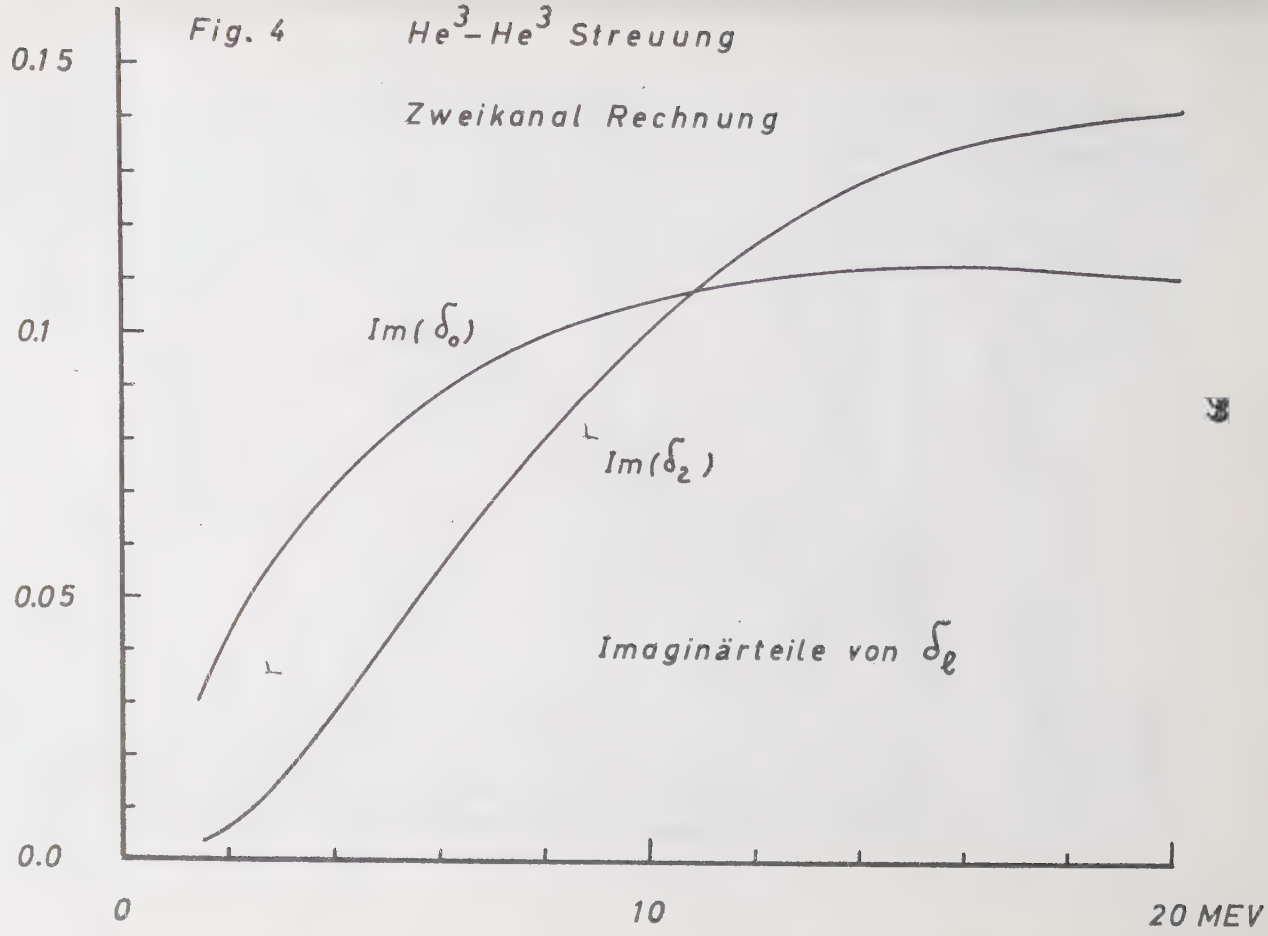


Fig. 4 $He^3-He^3$ Streuung
Zweikanal Rechnung
0.15
0.1
0.05
0.0
$Im(\delta_0)$
$Im(\delta_2)$
Imaginärteile von $\delta_\ell$
0
10
20 MEV

## 4. Anhang

FORTRAN Subroutinen

INKA, INFRA, DIRA, DIAGO, TRANS, INVER, GESI

```
                                3200  FORTRAN  (2,1.0)/(RTS)    03/01

      SUBROUTINE INKA
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION          WE(6,6),WEZ(6)
      DIMENSION WEW(6),NEN(6),MEN(6)
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6),UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      PI=3.1415927
      FSQC=(9./8.)**1.5
      U1=5./6.
      U2=1./3.
      U3=-1./6.
      U4=-0.25
      U5=0.5
      IF (MM) 401,402,401
  402 DO 403 J1=1,6
  403 IPE(J1)=J1
      IPE(7)=1
      IPE(8)=0
      IPE(9)=0
      IPE(10)=1
  401 DO 100 K4=1,6
      WE(6,K4)=-U3
      DO 100 K5=1,4
  100 WE(K5,K4)=U3
      IF (IPE(10)-1) 23,24,23
   23 IF (IPE(10)-2) 25,26,25
   25 IF (IPE(10)-3)  427,428,427
  427 IF (IPE(10)-4) 429,430,429
  429 RETURN
   24 DO 5 I6=1,6
      DO 5 I7=1,6
      DO 5 I5=1,2
    5 EQ(I6,I7,I5)=EP(I6,I7,1)
      GO TO 30
```

```
 26 DO 31 J2=1,6
    DO 31 J3=1,6
    EQ(J2,J3,1)=EP(J2,J3,1)
 31 EQ(J2,J3,2)=EP(J2,J3,2)
    GO TO 30
428 DO 321 L61=1,6
    DO 321 L62=1,6
    DO 321 L63=1,2
321 EQ(L61,L62,L63)=EP(L61,L62,2)
    GO TO 30
430 DO 322 L64=1,6
    DO 322 L65=1,6
    EQ(L64,L65,1)=EP(L64,L65,2)
322 EQ(L64,L65,2)=EP(L64,L65,1)
 30 DO 7 I11=1,6
    DO 7 I12=1,6
  7 ALT(I11,I12)=EQ(I11,I12,2)
    DO 8 I13=1,6
    DO 8 I14=1,6
  8 TRA(I13,I14)=0.0
    DO 33 J7=1,6
    NW =IPE(J7)
 33 TRA(J7,NW)=1.0
    NS=6
    CALL TRANS
    DO 9 I15=1,6
    DO 9 I16=1,6
  9 EQ(I15,I16,2)=UEN(I15,I16)
    N8=IPE(8)
    N9=IPE(9)
    IF (N8) 18,17,18
 18 EQ(N8,N8,1)=EQ(N8,N8,1)-AP
    EQ(N9,N9,1)=EQ(N9,N9,1)-AP
    EQ(N8,N9,1)=EQ(N8,N9,1)+2.*AP
 17 IF (IPE(10)-1) 40,41,40
 40 IF (IPE(10)-2) 42,43,42
 42 IF (IPE(10)-3) 444,445,444
444 IF (IPE(10)-4) 446,447,446
446 RETURN
445 DO 448 L66=1,6
448 WE(5,L66)=U4
    WE(5,4)=U5
    WE(5,5)=U5
    DO 449 L67=1,6
    NLA=IPE(L67)
449 WE(4,NLA)=WE(5,L67)
    ZE=WE(4,4)*WE(4,5)
    IF (ZE-0.15)  450,450,451
451 NIC=1
    DO 452 L68=1,6
452 WE(4,L68)=U3
    DO 453 L69=1,4
453 WE(L69,L69)=U1
    GO TO 101
450 NIC=2
    IF (WE(4,4)*WE(4,5)) 455,455,456
456 K1=5
    IF (WE(4,1)*WE(4,2)) 457,457,458
```

```
457 K2=1
    K3=2
    GO TO 63
458 K2=1
    K3=3
    GO TO 63
455 K1=1
    K2=2
    K3=3
    GO TO 63
447 NIC=2
    DO 460 L70=1,6
460 WE(5,L70)=U4
    WE(5,4)=U5
    WE(5,5)=U5
    DO 461 L71=1,3
    VE(L71)=U2
461 VE(L71+3)=-U2
    DO 462 L72=1,6
    NVT=IPE(L72)
462 WE(4,NVT)=VE(L72)
    IF (WE(4,4)*WE(4,5)) 463,463,464
463 GO TO 455
464 K1=4
    IF (WE(4,1)*WE(4,2)) 465,465,466
465 K2=3
    K3=6
    GO TO 63
466 K2=1
    K3=2
    GO TO 63
 41 NC1=IPE(1)+IPE(2)+IPE(3)
    NC2=IPE(4)+IPE(5)+IPE(6)
    IF (NC1-6) 47,48,47
 48 NIC=1
    GO TO 51
 47 IF(NC2-6) 49,50,49
 50 NIC=-1
 51 DO 13 I18=1,3
    WE(5,I18)=U2
 13 WE(5,I18+3)=-U2
    WE(1,1)=U1
    WE(2,2)=U1
    WE(3,5)=U1
    WE(4,6)=U1
    GO TO 101
 49 NIC=2
    DO 52 I30=1,3
    WE(5,I30)=U2
 52 WE(5,I30+3)=-U2
    DO 53 I32=1,6
    NLA=IPE(I32)
 53 WE(4,NLA)=WE(5,I32)
    DO 64 I33=1,6
```

```
64 WEZ(I33)=WE(4,I33)
   IF (WEZ(1)*WEZ(2)*WEZ(3)) 54,55,55
55 DO 65 I34=1,6
65 WEZ(I34)=-WE(4,I34)
54 IF (WEZ(1)) 56,57,57
57 K1=1
   GO TO 58
56 K1=2
58 K2=4
   K3=5
63 WE(1,K1)=U1
   WE(2,K2)=U1
   WE(3,K3)=U1
   GO TO 101
43 NIC=2
   DO 71 I40=1,3
   WE(5,I40)=U2
71 WE(5,I40+3)=-U2
   WEW(1)=U4
   WEW(2)=U4
   WEW(3)=U4
   WEW(6)=U4
   WEW(4)=U5
   WEW(5)=U5
   DO  72  I41=1,6
   NZW=IPE(I41)
72 WE(4,NZW)=WEW(I41)
   NEN(1)=-1
   NEN(2)=-1
   NEN(3)=-1
   NEN(6)=-1
   NEN(4)=2
   NEN(5)=2
   DO 73 I42=1,6
   NRW=IPE(I42)
73 MEN(NRW)=NEN(I42)
   IF (MEN(1)*MEN(2)+MEN(3)) 75,74,76
75 K1=1
   K2=2
   IF (MEN(4)*MEN(5)) 77,77,78
77 K3=6
   GO TO 63
78 K3=4
   GO TO 63
74 IF (MEN(1)*MEN(2)) 81,81,82
82 K1=1
   K2=2
   GO TO 92
81 IF (MEN(1)) 90,90,91
90 K1=1
   K2=3
   GO TO 92
91 K1=2
   K2=3
```

```
 92 DO 83 I42=4,6
    IF (MEN(I42)) 84,84,83
 84 K3=I42
    GO TO 63
 83 CONTINUE
 76 K1=4
    K2=5
    IF (MEN(1)*MEN(2)) 85,85,86
 85 K3=3
    GO TO 63
 86 K3=1
    GO TO 63
101 DO 102 L1=1,6
    DO 102 L2=1,6
102 VER(L1,L2)=WE(L1,L2)
    NS=6
    CALL INVER
    IF (MM) 111,112,111
112 IF (IPE(10)-1) 514,113,514
113 DE1=DET
    GO TO 103
514 D2E=DET
    GO TO 103
111 DE2=DET
    IF (IPE(9)-1) 103,105,103
103 DO 104 L3=1,6
    DO 104 L4=1,6
    ALT(L3,L4)=EQ(L3,L4,1)+EQ(L3,L4,2)
104 TRA(L3,L4)=REV(L3,L4)
    CALL TRANS
    NS=5
    CALL DIAGO
    IF (MM)   114,115,114
115 AK1=1,0
    DO 116 L5=1,4
116 AK1=AK1*UEN(L5,L5)
    AKT=ABSF(AK1)
    FA1=(PI**6)/(AKT**1.5)
    IF (IPE(10)-1) 516,517,516
517 F1A=FA1
    IPE(10)=3
    GO TO 401
516 F2A=FA1
    FQA1=SQRTF(F1A)
    FQA2=SQRTF(F2A)
    FQA=FQA1*FQA2
    RETURN
114 IF (NIC-2) 118,119,118
119 MCH=3
    GO TO 120
118 MCH=4
120 AK2=1,0
    DO 121 L6=1,MCH
121 AK2=AK2*UEN(L6,L6)
```

```
      AKT=ABSF(AK2)
      CMH=1.5*FLOATF(MCH)
      FA2=PI**CMH/(AKT**1.5)
  525 IF (IPE(10)-1) 518,519,518
  519 DEE=DE1
      FAA=F1A
      GO TO 520
  518 IF (IPE(10)-2) 521,522,521
  522 DEE=DE1
      FAA=FQA/FSQC
      GO TO 520
  521 IF (IPE(10)-3) 523,524,523
  524 DEE=D2E
      FAA=F2A
      GO TO 520
  523 DEE=D2E
      FAA=FQA*FSQC
  520 IF (IPE(9)-1) 526,527,526
  527 IF (NIC-2) 528,529,528
  526 GA=ABSF(DEE/DE2)
      GA=GA**3
      AMR=FA2*GA/FAA
      RETURN
  105 DO 106 L15=1,6
      DO 106 L16=1,6
      IF (L16-L15) 108,107,108
  107 ALT(L15,L16)=1.0
      GO TO 106
  108 ALT(L15,L16)=0.0
  106 CONTINUE
      DO 109 L17=1,6
      DO 109 L18=1,6
  109 TRA(L17,L18)=VER(L18,L17)
      NS=6
      CALL TRANS
      DO 110 L19=1,5
      DO 110 L20=1,5
  110 TKI(L19,L20)=UEN(L19,L20)
      DO 132 L21=1,2
      DO 133 L22=1,6
      DO 133 L23=1,6
      TRA(L22,L23)=REV(L22,L23)
  133 ALT(L22,L23)=EQ(L22,L23,L21)
      NS=6
      CALL TRANS
      DO 132 L26=1,5
      DO 132 L27=1,5
  132 EQ(L26,L27,L21)=UEN(L26,L27)
      IF (NIC-2) 301,302,301
  301 CALL DIRA
      GO TO 525
  528 AHH=ABSF(DEF/DE2)
      AHH=AHH**3/FAA
      AH1=SS*AHH
```

```
      AH2=SJ*AHH
      RETURN
  302 CALL INFRA
      GO TO 525
  529 AHH=ABSF(DEE/DE2)
      AHH=AHH**3
      AHH=AHH*TI/FAA
      EIS=0.0
      DO 320 L60=1,3
      WAM=ABSF(TE(L60))
      WAM=UKE(L60)/WAM
  320 EIS=EIS+WAM
      EIS=1.5*EIS
      AH1=(EIS+ULE)*AHH
      AH2=UKE(4)*AHH
      AH3=UKE(6)*AHH
      AH4=UKE(5)*AHH
      RETURN
      END
```

3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR INKA

0 ERRORS

```
                                3200  FORTRAN  (2.1.0)/(RTS)    03/01/68

      SUBROUTINE INFRA
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,DZE
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6),UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      PI=3.1415927
      DO 308 L37=1,5
      DO 308 L38=1,5
  308 UEN(L37,L38)=EQ(L37,L38,1)+EQ(L37,L38,2)
      NS=5
      CALL DIAGO
      DO 309 L39=1,5
  309 TE(L39)=UEN(L39,L39)
      TE(6)=UEN(4,5)
      DO 310 L40=1,2
      DO 311 L41=1,5
      DO 311 L42=1,5
      TRA(L41,L42)=AN(L41,L42)
  311 ALT(L41,L42)=EQ(L41,L42,L40)
      CALL TRANS
      DO 310 L43=1,5
      DO 310 L44=1,5
  310 EQ(L43,L44,L40)=UEN(L43,L44)
      DO 312 L45=1,5
      DO 312 L46=1,5
  312 VER(L45,L46)=AN(L45,L46)
      CALL INVER
      DO 313 L47=1,5
      DO 313 L48=1,5
      TRA(L47,L48)=REV(L48,L47)
  313 ALT(L47,L48)=TKI(L47,L48)
      CALL TRANS
      DO 314 L49=1,5
```

```
      DO 314 L50=1,5
  314 DIK(L49,L50)=EQ(L49,L50,2)+EQ(L50,L49,2)
      DO 315 L51=1,5
      DIK(4,L51)=EQ(L51,4,1)+EQ(4,L51,1)
  315 DIK(4,L51)=-DIK(4,L51)
      DO 317 L52=1,5
      DO 317 L53=L52,5
      DO 316 L54=1,5
  316 FOK(L52,L53,L54)=DIK(L52,L54)*DIK(L53,L54)*UEN(L52,L53)
      FOK(L52,L53,6)=DIK(L52,4)*DIK(L53,5)+DIK(L52,5)*DIK(L53,4)
  317 FOK(L52,L53,6)=FOK(L52,L53,6)*UEN(L52,L53)
      DO 318 L55=1,6
      UKE(L55)=0.0
      DO 318 L56=1,5
      DO 318 L57=L56,5
  318 UKE(L55)=UKE(L55)+FOK(L56,L57,L55)
      UEN(4,4)=-UEN(4,4)
      UEN(1,4)=0.0
      UEN(2,4)=0.0
      UEN(3,4)=0.0
      UEN(4,5)=0.0
      ULE=0.0
      DO 319 L58=1,5
      DO 319 L59=L58,5
  319 ULE=ULE+DIK(L58,L59)*UEN(L58,L59)
      ULE=3.0*ULE
      TI=TE(1)*TE(2)*TE(3)
      TI=ABSF(TI)
      TI=TI**1.5
      TI=PI**4.5/TI
      RETURN
      END
```

3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR  INFRA

NO ERRORS

```
                                3200  FORTRAN  (2.1.0)/(RTS)    03/01/66
      SUBROUTINE DIRA
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6),UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      PI=3.1415927
      NS=5
      CALL DIAGO
      DO 303 L29=1,5
      DO 303 L30=1,5
  303 EQ(L29,L30,2)=UEN(L29,L30)
      DO 304 L31=1,5
      DO 304 L32=1,5
  304 VER(L31,L32)=AN(L31,L32)
      CALL INVER
      DO 305 L33=1,5
      DO 305 L34=1,5
      TRA(L33,L34)=REV(L34,L33)
  305 ALT(L33,L34)=TKI(L33,L34)
      CALL TRANS
      SC=0.0
      SN=1.0
      DO 306 L35=1,4
      S=EQ(L35,L35,2)
      UT(L35)=4.0*S*S*UEN(L35,L35)
      SC=SC+S*UEN(L35,L35)
      S=ABSF(S)
      SN=SN*2.0*S
  306 UT(L35)=UT(L35)*0.75/S
      SC=SC*6.0
      TEG=(PI**6)/(SN**1.5)
      SS1=SC*TEG
      SS2=0.0
      DO 307 L36=1,4
  307 SS2=SS2+UT(L36)
      SS2=SS2*TEG
      SS=SS1+SS2
      SJ=TEG*UEN(5,5)
      RETURN
      END

        3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR   DIRA

RORS
```

```
                                3200  FORTRAN  (2,1,0)/(RTS)     03/01/68

      SUBROUTINE DIAGO
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6),UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      DIMENSION D(6,6),TRE(6,6,4),GES(6,6)
      EQUIVALENCE (A2,TRE)
      EQUIVALENCE (A2(145),GES)
      EQUIVALENCE (A2(181),D)
      IF (NIC-2) 2,3,2
    2 N=4
      GO TO 4
    3 N=3
    4 DO 5 I3=1,N
      DO 1 I1=1,5
      DO 1 I2=1,5
    1 D(I1,I2)=UEN(I1,I2)
      DO 6 I4=1,5
      DO 6 I5=1,5
      IF (I4-I5) 8,7,9
    7 TRA(I4,I5)=1.0
      GO TO 6
    8 IF (I4-I3) 9,10,9
   10 TRA(I4,I5)=-0.5*D(I4,I5)/D(I3,I3)
      GO TO 6
    9 TRA(I4,I5)=0.0
    6 CONTINUE
      DO 11 I6=1,5
      DO 11 I7=1,5
```

```
   ------
11 TRE(I6,I7,I3)=TRA(I6,I7)
   DO 12 I8=1,5
   DO 12 I9=1,5
12 ALT(I8,I9)=D(I8,I9)
 5 CALL TRANS
   DO 13 I10=1,5
   DO 13 I11=1,5
   IF (I10-I11) 15,14,15
14 AN(I10,I11)=1.0
   GO TO 13
15 AN(I10,I11)=0.0
13 CONTINUE
   DO 16 I12=1,N
   DO 18 I16=1,5
   DO 18 I17=1,5
18 GES(I16,I17)=0.0
   DO 17 I13=1,5
   DO 17 I14=1,5
   DO 17 I15=1,5
17 GES(I13,I14)=AN(I13,I15)*TRE(I15,I14,I12)+GES(I13,I14)
   DO 16 I18=1,5
   DO 16 I19=1,5
16 AN(I18,I19)=GES(I18,I19)
   RETURN
   END
```

3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR  DIAGO

```
                                3200  FORTRAN  (2.1.0)/(RTS)     03/01/
      SUBROUTINE TRANS
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6),UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      DIMENSION TR(6,6),TIM(6,6)
      EQUIVALENCE (A2(217),TR)
      EQUIVALENCE (A2(253),TIM)
      DO 1 I1=1,NS
      DO 1 I2=1,NS
    1 TR(I2,I1)=TRA(I1,I2)
      DO 2 I3=1,NS
      DO 2 I =1,NS
      TIM(I3,I)=0.0
    2 UEN(I3,I)=0.0
      DO 3 I4=1,NS
      DO 3 I5=1,NS
      DO 3 I6=1,NS
    3 TIM(I4,I5)=TR(I4,I6)*ALT(I6,I5)+TIM(I4,I5)
      DO 4 I7=1,NS
      DO 4 I8=1,NS
      DO 4 I9=1,NS
    4 UEN(I7,I8)=UEN(I7,I8)+TIM(I7,I9)*TRA(I9,I8)
      DO 5 I10=1,NS
      DO 5 I11=I10,NS
      IF(I11-I10) 6,5,6
    6 UEN(I10,I11)=UEN(I10,I11)+UEN(I11,I10)
      UEN(I11,I10)=0.0
    5 CONTINUE
      RETURN
      END

        3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR   TRANS

ERRORS
```

```
                                3200  FORTRAN  (2,1.0)/(RTS)    03/01/6
      SUBROUTINE INVER
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN      ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      COMMON FQA
      DIMENSION VE(6),TKI(6,6),UT(6),DIK(6,6),FOK(6,6,6  UKE(6)
      DIMENSION  EQ(6,6,2)  *
      COMMON  EQ,VE,TKI,UT,DIK,FOK,UKE,SS,SJ,TI,ULE
      DO 3 I4=1,NS
      DO 1 I1=1,NS
      DO 1 I2=1,NS
    1 A(I1,I2)=VER( I1,I2)
      DO 2 I3=1,NS
    2 C(I3)=0.0
      C(I4)=1.0
      CALL GESI
      DO 3 I5=1,NS
      I6=NS+1-I5
    3 REV(I6,I4)=UN(I5)
      RETURN
      END

        3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR   INVER

RRORS
```

```
                                3200  FORTRAN  (2.1.0)/(RTS)    03/01/68

      SUBROUTINE GESI
      DIMENSION DE(6,2),CROSS(301)
      COMMON ETA,PULS,CROSS,DE
      COMMON AMR
      COMMON AL,AQ,AD,AP,DET,AH1,AH2,AH3,AH4,F1A,F2A,DE1,D2E
      DIMENSION ALT(6,6),TRA(6,6),UEN(6,6),REV(6,6),VER(6,6),AN(6,6)
      COMMON ALT,TRA,UEN,REV,VER,AN
      DIMENSION  A(32,32),C(62),UN(62) ,A2(32,32)
      COMMON A,C,UN           ,A2,NSTEU
      COMMON MM,NIC,NS
      DIMENSION EP(6,6,2),IPE(10),TE(6)
      COMMON EP,IPE,TE
      DIMENSION A1(50)
      EQUIVALENCE (CROSS(103),A1)
   97 FORMAT (14H DETERMIN=NULL)
      N2K=1
      IF (NSTEU-1)  805,804,805
  805 DO 202 I=1,5
  202 READ (3) A
      READ (3) A2
      READ (3) A2
  804 NSW=NS-1
      DO 204 J1=1,NSW
      DO 102 I1=J1,NS
  102 A1(I1)=ABSF(A(I1,J1))
      MAX=J1
      DO 100 I3=J1,NS
      IF (A1(I3)-A1(J1)) 100,100,101
  101 A1(J1)=A1(I3)
      MAX=I3
  100 CONTINUE
      IF (A1(J1)-1.0E-17) 98,98,99
   99 DO 103 JW=J1,NS
      TEMP=A(J1,JW)
      A(J1,JW)=A(MAX,JW)
  103 A(MAX,JW)=TEMP
      TEMP=C(J1)
      C(J1)=C(MAX)
      C(MAX)= TEMP
      IF (NSTEU-1)  502,501,502
  502 IF (N2K-1)  501,503,501
  503 DO 201 J=1,NS
      TEMP=A2(J1,J)
      A2(J1,J)=A2(MAX,J)
```

```
201 A2(MAX,J)=TEMP
501 NEX=J1+1
    DO 104 NU=NEX,NS
    C(NU)=C(NU)-A(NU,J1)*C(J1)/A(J1,J1)
    DO 104 MU=NEX,NS
104 A(NU,MU)=A(NU,MU)-A(NU,J1)*A(J1,MU)/A(J1,J1)
    IF (NSTEU-1)   506,204,506
506 IF (N2K-1)   204,507,204
507 DO 203 NU=NEX,NS
    DO 203 MU=1,NS
203 A2(NU,MU)=A2(NU,MU)-A(NU,J1)*A2(J1,MU)/A(J1,J1)
204 CONTINUE
    IF (NS-7) 301,302,302
301 SE=1.0
    DO 200 LM=1,NS
200 SE=SE*A(LM,LM)
    DET=SE
302 IF (ABSF(A(NS,NS))-1.0E-17) 98,98,94
 98 WRITE (61,97)
    GO TO 96
 94 UN(1)=C(NS)/A(NS,NS)
    DO 105 N6=2,NS
    N9=N6-1
    N11=NS-N9
    T=0.0
    DO 107 N7=1,N9
    N8=NS-N7+1
107 T=T+A(N11,N8)*UN(N7)
105 UN(N6)=(C(N11)-T)/A(N11,N11)
    IF (NSTEU-1)  401,95,401
401 IF (N2K-1)  404,403,404
404 UN(NS+1)=C(NS+1)
    DO 701 I=1,NS
    J=NS-I+1
701 UN(NS+1)=UN(NS+1)+A2(NS,I)*UN(J)
    UN(NS+2)=C(NS+2)
    DO 702 I=1,NS
    J=NS-I+1
702 UN(NS+2)=UN(NS+2)+A2(NS-1,I)*UN(J)
    GO TO 95
403 DO 205 J=1,NS
205 A2(NS,J)=-A2(NS,J)/A(NS,NS)
    DO 206 I=1,NSW
    I1=NS-I
    DO 207 J=1,NS
    C(J)=0.0
    DO 207 JJ=1,I
    JJ1=NS-JJ+1
207 C(J)=C(J)+A(I1,JJ1)*A2(JJ1,J)
    DO 206 K=1,NS
206 A2(I1,K)=-(C(K)+A2(I1,K))/A(I1,I1)
    READ (3) A
```

```
      DO 208 I=1,NS
      II=NS-I+1
  208 C(I)=UN(II)
      DO 209 I=1 NS
      II=I+NS
      DO 209 J=1,NS
  209 C(II)=C(II)-A(I,J)*C(J)
      DO 210 I=1,NS
      II=I+NS
  210 C(I)=C(II)
      WRITE (3) A2
      DO 211 I=1,NS
      DO 212 II=1,NS
      III=II+NS
  212 C(III)=A(I,II)
      DO 211 J=1,NS
      A(I,J)=0.0
      DO 211 JJ=1,NS
      JJJ=JJ+NS
  211 A(I,J)=A(I,J)+C(JJJ)*A2(JJ,J)
      REWIND 3
      DO 213 I=1,6
  213 READ (3) A2
      DO 214 I=1,NS
      DO 214 J=1,NS
  214 A(I,J)=A(I,J)+A2(I,J)
      DO 215 I=1,NS
      II=I+NS
  215 C(II)=UN(I)
      DO 410 I=1,3
  410 READ (3) A2
      N2K=2
      GO TO  804
   96 DO 110 K=1,NS
  110 UN(K)=0.0
   95 RETURN
      END
```

```
      3200 FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS - FOR   GEST

NO ERRORS
```

# Lebenslauf

Am 8. November 1934 wurde ich in Oberlind (Thüringen) als Sohn des Malermeisters Adolf Sünkel und seiner Ehefrau Ida geb. Gebhardt geboren. Von 1941 bis 1949 besuchte ich die Volksschule und anschließend die Hermann-Pistor-Oberschule in Sonneberg, wo ich 1953 das Abitur ablegte. Nachdem ich im März 1956 die für die Anerkennung des Reifezeugnisses aus der DDR erforderliche Sonderprüfung bestanden hatte, begann ich im Sommer 1956 mit dem Studium der Physik und der Mathematik an der Universität Tübingen. Die Diplomarbeit "Die Steuerung eines Magnetfeldes für hochauflösende Kernresonanz durch ein Frequenznormal" fertigte ich unter der Leitung von Professor Dr. H. Krüger an und legte am 2. August 1965 die Diplomprüfung ab.

Anschließend begann ich unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. K. Wildermuth im Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen mit den Arbeiten zu der vorliegenden Dissertation. Im Februar 1968 wurde mir am gleichen Institut die Verwaltung einer Assistentenstelle übertragen.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren W.Braunbek, E.Kamke, H.Kneser, H.Krüger, F.Lenz, G.Möllenstedt, G.Molière, M.Müller, G.Pickert, W.Rüdorff, E.Schmid, W.Stoll, H.Wielandt und K.Wildermuth.

Druckbüro Frau Elly HUTH, 74 Tübingen